Lycée Notre Dame de Boulogne
Activité de découverte

La règle des signes

Prépare le chapitre : Inéquations produit et quotient

Classe de Seconde
Mathématiques

« Un avoir soustrait d'un vide est une dette ; une dette soustraite d'un vide est un avoir. Le produit de deux dettes est un avoir. »

— Brahmagupta, *Brahmasphutasiddhanta*, 628

628. Ujjain, Inde. Brahmagupta formalise le calcul sur les nombres négatifs.

Bien avant l'Europe, les mathématiciens indiens manipulaient les **nombres négatifs**, qu'ils interprétaient comme des *dettes* (par opposition aux *avoirs*, les nombres positifs). Brahmagupta est le premier à énoncer des règles de calcul complètes pour les produits et quotients de nombres de signes quelconques.

Question fondatrice : pourquoi le produit de deux nombres négatifs est-il positif ? Comment utiliser cette règle pour étudier le signe d'expressions algébriques ?

Comment aborder cette activité ?

Cette activité vous invite à **découvrir par vous-même** la règle des signes, puis à l'appliquer pour étudier le signe d'expressions algébriques et **résoudre des inéquations**. Le chemin va du calcul numérique à la démonstration.

Ce travail n'est pas noté. L'objectif est de vous préparer au cours qui suivra.

Les phases de l'exploration

- ▷ **Explorer** – Manipuler, calculer, observer.
- ◇ **Conjecturer** – Formuler une hypothèse à partir de vos observations.
- ✓ **Valider** – Tester votre conjecture, chercher des contre-exemples.
- ☐ **Formaliser** – Démontrer et appliquer à des expressions algébriques.

Objectif

À la fin de cette activité, vous saurez :

— Déterminer le **signe d'un produit** ou d'un **quotient** de nombres, y compris pour un produit de n facteurs.

— **Justifier algébriquement** le signe d'une expression affine $ax + b$ selon les valeurs de x.

— Construire un **tableau de signes** et **résoudre une inéquation** produit ou quotient.

Situation de départ

Quand on multiplie deux nombres, le résultat peut être positif, négatif ou nul. Brahmagupta affirmait que « le produit de deux dettes est un avoir ». Pouvez-vous redécouvrir sa règle et l'appliquer pour résoudre des inéquations ?

Phase 1 – ▷ Explorer & ◇ Conjecturer — La règle des signes

Vous allez observer le signe de produits et de quotients, puis formuler une règle générale.

1. ▷ **Produits de deux nombres.**
   Complétez le tableau en calculant chaque produit et en indiquant les signes.

Calcul	a	b	**Signe de** a	**Signe de** b	**Signe de** $a \times b$
$(+3) \times (+5)$	3	5	$+$	$+$	
$(-4) \times (+1{,}7)$	-4	$1{,}7$			
$(+\sqrt{2}) \times (-3)$	$\sqrt{2}$	-3			
$(-6) \times (-2)$	-6	-2			

2. ▷ **Quotients de deux nombres.**

Calcul	**Signe du numérateur**	**Signe du dénominateur**	**Signe du quotient**
$\dfrac{-15}{+0{,}5}$			
$\dfrac{-\sqrt{3}}{-7}$			

3. ◇ **La règle des signes.**
   En observant vos résultats, formulez votre conjecture :

Ma conjecture :

Rédigez avec vos propres mots la règle des signes pour un produit de deux nombres non nuls. Cette règle s'applique-t-elle aussi au quotient ? Justifiez.

4. ◇ Combien de cas distincts y a-t-il pour le signe d'un produit de deux nombres **non nuls** ? Justifiez en vous appuyant sur les combinaisons de signes possibles.

Phase 2 – ✓ Valider — Tests, cas particuliers et extension

Testez votre règle, explorez ses limites, puis étendez-la à un produit de n facteurs.

5. ✓ **Tests numériques.**
Vérifiez votre règle sur ces calculs (prédisez le signe **avant** de calculer) :

Calcul	Signe prédit	Vérification
$(-2{,}5) \times (-3{,}2)$		
$(+\pi) \times (-\sqrt{5})$		
$\dfrac{-15}{-0{,}5}$		

6. ✓ **Le cas du zéro et la valeur interdite.**
   (a) Calculez $(-5) \times 0 =$ .... Que peut-on dire du produit quand un facteur est nul ?
   (b) Peut-on calculer $\frac{5}{0}$? Quelle condition indispensable faut-il vérifier avant d'appliquer la règle des signes à un quotient ?

7. ✓ **Produit de plusieurs facteurs.**
Déterminez le signe de $(-2) \times (+3) \times (-5) \times (-1) \times (+4)$ en appliquant la règle des signes étape par étape :

$\underbrace{(-2) \times (+3)}_{\text{signe : ....}} \times (-5) = \underbrace{\qquad\qquad \times (-5)}_{\text{signe : ....}} \times (-1) = \underbrace{\qquad\qquad \times (-1)}_{\text{signe : ....}} \times (+4) =$ signe final : ....

Même question en ajoutant un sixième facteur (-7) au produit. Quel est le nouveau signe ? ......

Que constatez-vous quand on ajoute un facteur négatif ?

8. ◇ **Conjecture sur la parité.**
Dans le produit précédent (5 facteurs), combien sont négatifs ? ...... Le produit est-il positif ou négatif ? ....

Avec 6 facteurs (après ajout de -7), combien sont négatifs ? .... Le produit ? ....

Conjecture sur le produit de n nombres non nuls :

Formulez une règle générale reliant le signe d'un produit de n nombres non nuls au **nombre de facteurs négatifs**.

9. ✓ **Application aux quotients de produits.**
Sans tout recalculer, déduisez le signe de $\dfrac{(-2)\times(+3)\times(-5)}{(-1)\times(+4)}$.
Indication : comptez le nombre total de facteurs négatifs (numérateur et dénominateur confondus).

Phase 3 – ☐ **Formaliser** — Du nombre à l'expression algébrique

Vous allez maintenant appliquer la règle des signes à des expressions qui dépendent d'un nombre x, construire un tableau de signes, puis résoudre des inéquations.

10. ☐ **Le signe de $A(x) = 2x - 6$.**
(a) Résoudre l'équation $2x - 6 = 0$. $x =$ ....
(b) Compléter le tableau de valeurs :

x	0	2	3	4	6
$A(x) = 2x - 6$					
Signe					

(c) **Justification algébrique.** Supposons que $x < 3$.
En multipliant les deux membres de l'inégalité $x < 3$ par 2 (qui est positif), on obtient : .....
En soustrayant 6 des deux côtés : ....
Conclusion : si $x < 3$, alors $2x - 6$ est ....
Quel outil mathématique avez-vous utilisé ?
(d) Complétez : Si $x < 3$, alors $2x - 6$ est Si $x = 3$, alors $2x - 6$ est Si $x > 3$, alors $2x - 6$ est

11. ☐ **Le signe de $B(x) = -3x + 15$.**
En procédant de la même façon (équation, puis justification algébrique), étudiez le signe de $B(x)$.
(a) Résoudre $-3x + 15 = 0$. $x =$ ....

(b) **Attention !** Le coefficient de x est -3, qui est **négatif**. Quand on divise (ou multiplie) une inégalité par un nombre négatif, que se passe-t-il pour le sens de l'inégalité ?

(c) Complétez : Si $x <$. , alors $-3x + 15$ est . Si $x =$. , alors $-3x + 15$ est . Si $x >$. , alors $-3x + 15$ est ....

12. ☐ **Tableau de signes de** $(2x - 6)(-3x + 15)$**.**

(a) Quelles sont les valeurs de x qui annulent chaque facteur ?

$2x - 6 = 0$ pour $x =$ .... $-3x + 15 = 0$ pour $x =$ ....

Placez ces valeurs dans l'**ordre croissant** : .... puis ....

(b) Complétez le tableau de signes (indiquez $+$, $-$ ou 0 dans chaque case) :

x	$-\infty$ ...		...		... $+\infty$
Signe de $2x - 6$					
Signe de $-3x + 15$					
Signe du produit					

13. ☐ **Résolution d'une inéquation.**

En utilisant votre tableau de signes, déterminez l'ensemble des valeurs de x telles que :

$$(2x - 6)(-3x + 15) \geqslant 0$$

Rappel de notation : le crochet est fermé [ou] si la borne est atteinte (le produit vaut 0*), ouvert] ou [sinon.*

Écrivez la réponse sous forme d'intervalle(s) :

$\boxed{S = \qquad\qquad\qquad}$

14. ☐ **Le quotient : de la multiplication à la division.**

On s'intéresse maintenant au quotient $Q(x) = \dfrac{2x - 6}{-3x + 15}$.

(a) Quelle valeur de x est **interdite** ? Pourquoi ?

(b) Construisez le tableau de signes de $Q(x)$. Quelle différence avec celui du produit ?

Indication : à la valeur interdite, on trace une ***double barre*** $\|$ *au lieu d'écrire* 0*.*

x	$-\infty$ $\dots$		$\dots$		$\dots$ $+\infty$
Signe de $2x-6$					
Signe de $-3x+15$					
Signe de $Q(x)$					

(c) Résolvez $\dfrac{2x-6}{-3x+15} \leqslant 0$.

Attention aux bornes : la valeur interdite ne peut **jamais** être solution, même si l'inégalité est large ($\leqslant$).

$S =$

Bilan

Ce que j'ai découvert :

Résumez, avec vos propres mots : la règle des signes, la règle de parité pour n facteurs, la méthode du tableau de signes, et la différence entre produit et quotient.

Ce qui me pose encore question :

Y a-t-il des points que vous n'avez pas compris ? Des questions que vous vous posez ?

Lien avec le cours

Cette activité prépare le chapitre sur : Inéquations produit et quotient

En cours, nous formaliserons et démontrerons que :

— La règle des signes est une **propriété fondamentale** de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

— Pour toute expression affine $ax+b$ avec $a \neq 0$, le signe change en $x = -\dfrac{b}{a}$, et le sens dépend du **signe de** a.

— Le **tableau de signes** est l'outil central pour résoudre les inéquations $(ax+b)(cx+d) \geqslant 0$ ou $\dfrac{ax+b}{cx+d} \leqslant 0$.

— Pour les quotients, le dénominateur ne peut **jamais** s'annuler (valeur interdite, double barre).

Les justifications algébriques que vous avez ébauchées seront généralisées sous forme de **propriétés démontrées**.

Pour aller plus loin

Défi 1 — Trois facteurs.

Construisez le tableau de signes du produit $(x-1)(x-3)(x-5)$ et résolvez l'inéquation :

$$(x-1)(x-3)(x-5) > 0$$

Indication : le tableau aura ***quatre lignes*** *(une par facteur, plus le produit) et* ***trois valeurs critiques****.*

Défi 2 — Le cas général.

Soit $a \neq 0$ et b un réel quelconque. Montrez que l'expression $ax+b$ s'annule en $x = -\dfrac{b}{a}$ et déterminez le signe de $ax+b$ de chaque côté de cette valeur, selon le signe de a.

Indication : distinguez les cas $a > 0$ et $a < 0$, et utilisez les propriétés des inégalités.

Fin de l'activité

La suite au prochain cours !