



# A4. INÉQUATIONS PRODUIT ET QUOTIENT

*L'Empire des Signes — de la règle des signes aux tableaux de signes*

## TABLE DES MATIÈRES

		<b>3. TABLEAU DE SIGNES D'UN PRODUIT OU D'UN QUOTIENT</b>	<b>4</b>
		3.1. Produit de deux facteurs affines . . . . .	4
		3.2. Quotient de deux facteurs affines . . . . .	5
		3.3. Produits et quotients à plusieurs facteurs . .	6
<b>1. RÈGLE DES SIGNES</b>	<b>2</b>		
<b>2. SIGNE D'UNE EXPRESSION AFFINE</b>	<b>3</b>	<b>4. RÉSOUDRE UNE INÉQUATION : DE L'ÉNONCÉ À LA SOLUTION</b>	<b>6</b>
2.1. Valeur d'annulation . . . . .	3	4.1. Stratégie générale . . . . .	7
2.2. Signe de part et d'autre de la racine . . . . .	3	4.2. Inéquations nécessitant une factorisation . .	7
2.3. Tableau de signes d'une expression affine . .	4		

### PARCOURS DU CHAPITRE

- **Essentiel** — Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.
- ◆ **Approfondissement** — Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.
- ★ **Excellence** — Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

**Documents associés :** [ACT-A4] La règle des signes • [EXO-A4] La Gamme • [DM-A4] L'Empire des Signes • [EVAL-A4] Synthèse



Compagnon numérique du chapitre

Quiz • Vidéos • Flashcards

« Un nombre négatif multiplié par un nombre négatif donne un nombre positif; un nombre négatif multiplié par un nombre positif donne un nombre négatif. »

— Brahmagupta, *Brāhma-sphuta-siddhānta*, 628

En 628, le mathématicien indien Brahmagupta énonce pour la première fois les règles de calcul avec les nombres négatifs : **le produit de deux négatifs est positif, le produit d'un positif et d'un négatif est négatif**. Ces règles, d'apparence simple, sont le fondement d'un outil puissant : le **tableau de signes**, qui permet de résoudre des inéquations sans avoir besoin de connaître les valeurs exactes.

Ce chapitre formalise trois questions fondamentales : **comment déterminer le signe d'une expression algébrique ? Comment organiser cette information dans un tableau ? Comment en déduire les solutions d'une inéquation ?**

**PORTAIL ACT**

ACT-A4 · Phases 1-4 ★★

Découverte de la règle des signes et des tableaux de signes. ■

## 1. RÈGLE DES SIGNES

### PROPRIÉTÉ – RÈGLE DES SIGNES POUR UN PRODUIT OU UN QUOTIENT

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels non nuls.

Le produit  $a \times b$  (ou le quotient  $\frac{a}{b}$ ) est **positif** si  $a$  et  $b$  sont **de même signe**.

Le produit  $a \times b$  (ou le quotient  $\frac{a}{b}$ ) est **négatif** si  $a$  et  $b$  sont **de signes contraires**.

$\times$ ou $\div$	+	-
+	+	-
-	-	+

*Brahmagupta est le premier à traiter zéro et les négatifs comme des nombres à part entière. Son œuvre influence toute l'algèbre arabe puis européenne.*

— Brahmagupta, 628

### OBJECTIFS

- ▷ Connaître la règle des signes
- ▷ Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient

### Attention

Un produit (ou un quotient) est **nul** dès qu'un de ses facteurs (ou son numérateur) est nul. Un quotient dont le **dénominateur** est nul **n'existe pas**.

### PROPRIÉTÉ – EXTENSION À $n$ FACTEURS

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des nombres réels tous non nuls.

Le produit  $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$  est :

- **positif** si le nombre de facteurs négatifs est **pair** ;
- **négatif** si le nombre de facteurs négatifs est **impair**.

Cette règle s'applique aussi aux quotients, en comptant les facteurs négatifs du numérateur et du dénominateur.

### Exemple

$(-2) \times 4 \times (-1) \times (-3) = -24$  : trois facteurs négatifs (impair)  $\Rightarrow$  négatif.

### JALON

Je sais déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient de nombres.

## 2. SIGNE D'UNE EXPRESSION AFFINE

### 2.1. Valeur d'annulation

#### PROPRIÉTÉ – RACINE D'UNE EXPRESSION AFFINE

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$ . L'expression  $ax + b$  s'annule pour :

$$x_0 = -\frac{b}{a}$$

C'est l'unique solution de l'équation  $ax + b = 0$ .

*Exemple*

$2x - 6 = 0 \iff 2x = 6 \iff x = 3$ . La valeur d'annulation est  $x_0 = 3$ .

$-3x + 15 = 0 \iff -3x = -15 \iff x = 5$ . La valeur d'annulation est  $x_0 = 5$ .

#### OBJECTIFS

▷ Trouver la valeur d'annulation de  $ax + b$

▷ Déterminer le signe de  $ax + b$  sur  $\mathbb{R}$

▷ Dresser le tableau de signes d'une expression affine

#### ← PRÉREQUIS

*Inégalités*

Propriétés des inégalités (ajout, multiplication).

### 2.2. Signe de part et d'autre de la racine

#### PROPRIÉTÉ – SIGNE D'UNE EXPRESSION AFFINE

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$ . Soit  $x_0 = -\frac{b}{a}$ . L'expression  $ax + b$  :

- s'annule en  $x_0 = -\frac{b}{a}$  ;
- est **du signe de  $a$**  pour  $x > x_0$  ;
- est **du signe opposé à  $a$**  pour  $x < x_0$ .

*Démonstration.*

Supposons  $a > 0$ .

Si  $x > x_0$ , alors  $x - x_0 > 0$ . Or  $ax + b = a(x - x_0)$ , donc  $ax + b = a \times \underbrace{(x - x_0)}_{>0}$ .

Puisque  $a > 0$ , le produit de deux positifs est positif :  $ax + b > 0$ .

Si  $x < x_0$ , alors  $x - x_0 < 0$ , donc  $ax + b = a \times \underbrace{(x - x_0)}_{<0}$ .

Puisque  $a > 0$ , le produit d'un positif par un négatif est négatif :  $ax + b < 0$ .

Le raisonnement pour  $a < 0$  est analogue : les signes s'inversent. ■

**Racine :** On dit que  $x_0$  est une racine de l'expression : elle la rend nulle, elle est la racine du problème  $ax + b = 0$ .

### 2.3. Tableau de signes d'une expression affine

#### MÉTHODE – DRESSER LE TABLEAU DE SIGNES DE $ax + b$

1. Calculer la valeur d'annulation :  $x_0 = -\frac{b}{a}$ .
2. Tracer le tableau avec  $x_0$  comme valeur repère.
3. Remplir : le signe est celui de  $a$  à droite de  $x_0$ , et l'opposé à gauche.

Exemple – Cas  $a > 0$  :  $2x - 6$

Racine :  $x_0 = 3$ . Coefficient  $a = 2 > 0$ .

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$2x - 6$	$-$	$0$	$+$

Retenir : quand  $a > 0$ , le signe est «  $-$  puis  $+$  ».

Exemple – Cas  $a < 0$  :  $-3x + 15$

Racine :  $x_0 = 5$ . Coefficient  $a = -3 < 0$ .

$x$	$-\infty$	$5$	$+\infty$
$-3x + 15$	$+$	$0$	$-$

Retenir : quand  $a < 0$ , le signe est «  $+$  puis  $-$  ».

#### Attention

Moyen mnémotechnique : le signe de  $a$  est toujours à droite de la racine (côté des  $+\infty$ ).

#### JALON

Je sais dresser le tableau de signes d'une expression affine.

#### ÉCHO EXO

EXO-A4 · Ex. 1 ★

Signe d'expressions affines — gamme d'entraînement. ■

### 3. TABLEAU DE SIGNES D'UN PRODUIT OU D'UN QUOTIENT

#### 3.1. Produit de deux facteurs affines

#### MÉTHODE – TABLEAU DE SIGNES D'UN PRODUIT $(ax + b)(cx + d)$

1. Identifier chaque facteur et calculer sa racine.
2. Ordonner les racines sur la première ligne du tableau.
3. Remplir une ligne de signe par facteur (méthode de la section 2).
4. Appliquer la règle des signes colonne par colonne pour obtenir le signe du produit.

#### OBJECTIFS

- ▷ Dresser le tableau de signes d'un produit
- ▷ Dresser le tableau de signes d'un quotient
- ▷ Résoudre des inéquations produit et quotient

Exemple – Étude du signe de  $(2x - 6)(-x + 4)$

**Facteur 1 :**  $2x - 6$ , racine  $x = 3$ , coefficient  $a = 2 > 0$ .

**Facteur 2 :**  $-x + 4$ , racine  $x = 4$ , coefficient  $a = -1 < 0$ .

$x$	$-\infty$	3	4	$+\infty$
$2x - 6$		-	0	+
$-x + 4$		+	+	0
$(2x - 6)(-x + 4)$		-	0	+

**Lecture :**  $(2x - 6)(-x + 4) \geq 0$  pour  $x \in [3; 4]$ .

ÉCHO EXO

EXO-A4 · Ex. 2 ★★

Batterie d'inéquations produit. ■

### 3.2. Quotient de deux facteurs affines

#### DÉFINITION – VALEUR INTERDITE

Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  avec  $c \neq 0$ . Pour le quotient  $\frac{ax + b}{cx + d}$ , la valeur  $x_0 = -\frac{d}{c}$  est appelée **valeur interdite** : le dénominateur s'y annule et le quotient **n'est pas défini**.

#### Attention

Dans le tableau de signes, une valeur interdite est signalée par une **double barre** ||. Elle n'est **jamais** incluse dans l'ensemble des solutions, même pour une inégalité large ( $\leq$  ou  $\geq$ ).

#### MÉTHODE – TABLEAU DE SIGNES D'UN QUOTIENT $\frac{ax + b}{cx + d}$

Même méthode que pour un produit, mais :

- repérer la racine du dénominateur comme **valeur interdite** ;
- marquer une **double barre** || dans le tableau à cette valeur ;
- la règle des signes s'applique de la même façon (le signe d'un quotient obéit aux mêmes règles que le signe d'un produit).

Exemple – Étude du signe de  $\frac{x - 3}{2x + 1}$

**Numérateur :**  $x - 3$ , racine  $x = 3$ , coefficient  $a = 1 > 0$ .

**Dénominateur :**  $2x + 1$ , racine  $x = -\frac{1}{2}$ , coefficient  $a = 2 > 0$ . **Valeur interdite.**

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$3$	$+\infty$	
$x - 3$		-	0	+	
$2x + 1$		-	0	+	
$\frac{x - 3}{2x + 1}$		+	-	0	+

**Lecture :**  $\frac{x - 3}{2x + 1} \leq 0$  pour  $x \in \left] -\frac{1}{2}; 3 \right]$ .

On exclut  $-\frac{1}{2}$  (valeur interdite) mais on inclut 3 (inégalité large, le numérateur s'y annule).

ÉCHO EXO

EXO-A4 · Ex. 3 ★★

Batterie d'inéquations quotient. ■

### 3.3. Produits et quotients à plusieurs facteurs

*Remarque*

La méthode s'étend naturellement : on ajoute une ligne par facteur dans le tableau. Le signe global se déduit colonne par colonne en appliquant la règle des signes (compter les signes - : pair  $\Rightarrow$  positif, impair  $\Rightarrow$  négatif).

*Exemple – Étude du signe de  $(-3x + 12)(2x + 5)(-x + 3)$*

**Racines :**  $x = 4$  (coeff.  $-3 < 0$ ),  $x = -\frac{5}{2}$  (coeff.  $2 > 0$ ),  $x = 3$  (coeff.  $-1 < 0$ ).

**Ordre :**  $-\frac{5}{2} < 3 < 4$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$3$	$4$	$+\infty$			
$-3x + 12$		+	+	+	0	-		
$2x + 5$		-	0	+	+	+		
$-x + 3$		+	+	0	-	-		
Produit		-	0	+	0	-	0	+

## 4. RÉSOUDRE UNE INÉQUATION : DE L'ÉNONCÉ À LA SOLUTION

JALON

Je sais dresser un tableau de signes avec produit, quotient et plusieurs facteurs, et résoudre les inéquations associées.

♦ Cette section approfondit la stratégie générale. Elle mobilise les identités remarquables du chapitre A2.

**OBJECTIFS**

- ▷ Transformer une inéquation en forme factorisée
- ▷ Appliquer la méthode complète
- ▷ Modéliser un problème par une inéquation

**4.1. Stratégie générale**

**MÉTHODE – RÉSOUDRE UNE INÉQUATION PRODUIT OU QUOTIENT**

1. **Transformer** : ramener l'inéquation à la forme  $E(x) \geq 0$  (ou  $\leq, >, <$ ) où  $E(x)$  est un produit ou un quotient.
2. **Factoriser** : si  $E(x)$  n'est pas encore sous forme factorisée, utiliser les identités remarquables ou chercher les racines.
3. **Tableau de signes** : dresser le tableau de signes de  $E(x)$ .
4. **Lire et conclure** : lire les intervalles où le signe convient, écrire l'ensemble des solutions.

**4.2. Inéquations nécessitant une factorisation**

*Exemple – Factorisation par  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$*

Résoudre  $(2x - 1)^2 - 9 \geq 0$ .

On pose  $A = 2x - 1$ . Alors  $A^2 - 9 = A^2 - 3^2 = (A - 3)(A + 3) = (2x - 4)(2x + 2)$ .

On factorise :  $(2x - 4)(2x + 2) = 4(x - 2)(x + 1)$ .

Le signe de  $4(x - 2)(x + 1)$  est celui de  $(x - 2)(x + 1)$  (car  $4 > 0$ ).

**ÉCHO EXO**

EXO-A4 · Ex. 7-9 ★★★

Problèmes contextualisés : bénéfice, enclos, concentration. ♦

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$x + 1$		-	0	+
$x - 2$		-	-	0
$(x + 1)(x - 2)$		+	0	-

**Solution** :  $(2x - 1)^2 - 9 \geq 0$  pour  $x \in ]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$ .

**ÉCHO EXO**

EXO-A4 · Ex. 10-11 ★★★★★

Paramètre et systèmes d'inéquations.

♦ ★

*Exemple – Mise au même dénominateur*

Résoudre  $\frac{5t}{t+2} \leq 3$  (avec  $t \geq 0$ ).

On ramène à zéro au second membre :

$$\frac{5t}{t+2} - 3 \leq 0 \iff \frac{5t - 3(t+2)}{t+2} \leq 0 \iff \frac{2t - 6}{t+2} \leq 0$$

**Numérateur** :  $2t - 6$ , racine  $t = 3$ .

**Dénominateur** :  $t + 2$ , racine  $t = -2$  (valeur interdite, mais hors domaine  $t \geq 0$ ).

Pour  $t \geq 0$ , le dénominateur  $t + 2 > 0$  toujours. Donc il faut  $2t - 6 \leq 0$ , soit  $t \leq 3$ .

**Solution** :  $t \in [0; 3]$ .

**CIBLE DA**

DM-A4 · Parties II-III ★★★★★

Des signes en dimension 2 : territoires, cercles et paraboles. ♦ ★

**JALON**

Je sais résoudre une inéquation en transformant l'expression, en factorisant, puis en dressant le tableau de signes.