



« Je pense, donc je suis. » — René Descartes, *Discours de la Méthode* (1637)

Avant de commencer : à propos de ce document

Ce devoir maison n'est pas une évaluation ordinaire. C'est une **invitation au voyage** dans un territoire mathématique que vous n'avez peut-être jamais exploré.

Quelques principes importants :

- **Ce DM est facultatif.** Tout travail rendu sera valorisé par la note maximale. Ce qui compte, c'est l'**effort authentique et la curiosité**, pas le fait d'avoir tout terminé. Un travail bâclé ne sera pas valorisé ; un travail sincère, même partiel, le sera toujours.
- **Ce document vous accompagnera peut-être plusieurs années.** Certaines questions qui vous semblent inaccessibles aujourd'hui deviendront limpides après quelques mois d'études supplémentaires. Gardez-le : vous pourrez y revenir en prépa, à l'université, ou simplement quand l'envie vous prendra.
- **Un horizon raisonnable : 3-4 semaines.** Il n'y a pas de date limite stricte, mais visez cet horizon. Si vous avez besoin de plus de temps, parlez-en.
- **Si vous bloquez, écrivez.** Expliquez ce que vous avez essayé, où vous êtes bloqué, ce que vous pensez qu'il faudrait faire. C'est aussi du travail mathématique — et souvent le plus formateur.

Niveaux de difficulté

Les questions sont organisées en trois niveaux, comme les étapes d'une ascension :

△ Niveau I – Fondations

Calculs et vérifications. Accessible à tous avec les outils du cours.

▲ Niveau II – Construction

Compréhension des mécanismes. Demande un peu de recul et d'autonomie.

◆ Niveau III – Sommet

Démonstrations rigoureuses et questions ouvertes. Un défi stimulant pour les plus motivés, ou une invitation pour plus tard.

Conseil : Faites toutes les questions △ d'une partie avant de passer aux ▲. Les ◆ sont des défis : ne vous découragez pas si vous n'y arrivez pas cette année.

Prologue – La nuit du 10 novembre 1619

10 novembre 1619. Neuburg-sur-le-Danube, Bavière.

René Descartes a vingt-trois ans. Jeune soldat engagé dans l'armée du duc de Bavière, il est cantonné dans une chambre chauffée par un poêle — le fameux *poêle de Descartes*. Cette nuit-là, il fait trois rêves successifs qui vont changer l'histoire des mathématiques.

Dans le premier rêve, il est assailli par des fantômes. Dans le deuxième, un coup de tonnerre remplit sa chambre d'étincelles. Dans le troisième, il ouvre un dictionnaire et tombe sur ces mots : « *Quel chemin suivrai-je dans la vie ?* »

Au réveil, Descartes est convaincu d'avoir reçu une révélation : toutes les sciences peuvent être unifiées par les mathématiques. Il conçoit alors une idée révolutionnaire : placer un **repère** sur le plan — deux droites perpendiculaires graduées — et décrire toute figure géométrique par une **équation**.

Un cercle n'est plus une forme dessinée au compas : c'est l'ensemble des points (x, y) tels que $x^2 + y^2 = R^2$. Une droite n'est plus un trait tiré à la règle : c'est $y = ax + b$.

La question fondatrice : Si une équation $f(x, y) = 0$ dessine une *courbe* (une frontière), que dessine une **inéquation** $f(x, y) > 0$?

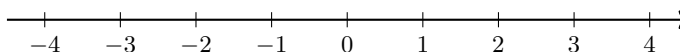
Réponse : un **territoire**.

Exercice 1: Question préliminaire | ★

△ Mise en situation

On considère l'expression $P(x) = (x - 1)(x + 2)$.

1. Calculer $P(-3)$, $P(-1)$, $P(0)$ et $P(2)$. Pour chaque valeur, préciser si le résultat est positif, négatif ou nul.
2. Sur la droite graduée ci-dessous, colorier en **bleu** les zones où $P(x) > 0$ et en **rouge** les zones où $P(x) < 0$.



3. Que se passe-t-il aux points $x = -2$ et $x = 1$? Comment appelleriez-vous ces points ?

1. Partie I – La Boussole

Avant de conquérir le plan, il faut maîtriser la droite. Dans cette partie, nous installons le tableau de signes comme un outil de cartographie : chaque inéquation découpe la droite réelle en **territoires**, séparés par des **frontières**.

Vocabulaire topologique

— **Frontière** : point où l'expression change de signe (zéro) ou n'est pas définie (valeur interdite).

- **Territoire** : intervalle où le signe est constant (toujours + ou toujours -).
- **Point plein** • : la frontière fait *partie* du territoire (inéquation large : \geq ou \leq).
- **Point vide** ◦ : la frontière *ne fait pas partie* du territoire (inéquation stricte : $>$ ou $<$, ou valeur interdite).

Exercice 2: La logique des frontières | ★★

On considère l'expression : $Q(x) = \frac{4 - x^2}{2x + 3}$.

△ Étude préliminaire

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_Q de $Q(x)$. Quelle est la valeur interdite ?
2. Factoriser le numérateur $4 - x^2$ en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
3. Dresser le tableau de signes complet de $Q(x)$ sur \mathcal{D}_Q .

▲ La carte de la droite

4. En déduire l'ensemble solution de l'inéquation $Q(x) \geq 0$. Écrire la réponse sous forme d'une réunion d'intervalles.
5. Représenter cette solution sur une droite réelle en utilisant les symboles • (point plein) et ◦ (point vide). Justifier : pourquoi $x = -2$ et $x = 2$ sont des points •, mais $x = -\frac{3}{2}$ est un point ◦ ?

En 1D, une inéquation découpe la droite réelle en **territoires**. Les zéros et les valeurs interdites sont les **frontières**. Le tableau de signes est votre **carte**.

Nous allons maintenant quitter la droite pour conquérir le plan tout entier.

2. Partie II – La Conquête du Plan

Descartes ne s'est pas arrêté à la droite réelle. Son repère orthonormé ouvre un territoire bien plus vaste : le **plan**. Chaque point a deux coordonnées (x, y) . Et une expression comme $E(x, y) = y - x$ n'est plus un nombre qui dépend d'un seul paramètre, mais de la position d'un point dans le plan. La droite $y = x$ dessine une frontière. De quel côté est-on positif ? De quel côté est-on négatif ?

Demi-plan

Soit $E(x, y) = ax + by + c$ une expression *affine* en x et y (avec a et b non tous deux nuls). La droite d'équation $E(x, y) = 0$ sépare le plan en deux **demi-plans** :

- le demi-plan où $E(x, y) > 0$,
- le demi-plan où $E(x, y) < 0$.

Pour déterminer quel demi-plan est positif, il suffit de tester **un seul point** qui n'est pas sur la droite.

Exercice 3: Un seul demi-plan | ★

△ On considère l'expression $E(x, y) = y - x$.

1. Tracer la droite $\Delta : y = x$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
2. Calculer $E(0, 1)$ et $E(1, 0)$. En déduire quel demi-plan est positif (au-dessus ou en-dessous de Δ ?).
3. Colorier en **bleu** le demi-plan où $E(x, y) > 0$ et en **rouge** le demi-plan où $E(x, y) < 0$.

Méthode des éclaireurs

Pour déterminer le signe d'une expression dans une *région* du plan, il suffit de tester **un seul point** de cette région (un « éclaireur »). Si l'éclaireur donne un signe +, toute la région est +.

Pourquoi ? Parce que le signe ne peut changer qu'en traversant une **frontière** (une droite, un cercle...). Tant qu'on reste dans la même région, le signe reste le même.

Exercice 4: Le choc des mondes | ★★★

On étudie l'inéquation : $(y - x)(y + x - 4) \leq 0$.

△ **Les frontières**

1. Tracer les deux droites frontières $D_1 : y = x$ et $D_2 : y = -x + 4$ dans un même repère. On prendra $-1 \leq x \leq 5$ et $-1 \leq y \leq 5$.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D_1 et D_2 .
3. Les deux droites découpent le plan en **4 secteurs**. Placer un « éclaireur » (point test) dans chacun des 4 secteurs. *Par exemple : (0, 3) en haut, (4, 0) à droite, (2, 0) en bas, (-1, 1) à gauche.*

▲ **Le tableau de signes graphique**

4. Pour chaque secteur, calculer le signe de $(y - x)$ et de $(y + x - 4)$ en utilisant l'éclaireur choisi, puis en déduire le signe du produit. Compléter le tableau :

Secteur	Signe de $(y - x)$	Signe de $(y + x - 4)$	Signe du produit
Haut			
Droite			
Bas			
Gauche			

5. Colorier les zones du plan où $(y - x)(y + x - 4) \leq 0$. Décrire la forme obtenue.
6. Le point d'intersection des deux droites fait-il partie de la solution ? Justifier en calculant la valeur du produit en ce point.

3. Partie III – L'Architecture des Courbes

Le plan ne contient pas que des droites. Descartes a montré que les cercles, les ellipses, les paraboles — toutes les courbes — peuvent s'écrire comme des équations. Et chaque courbe, comme une droite, sépare le plan en régions. Le cercle, par exemple, sépare l'intérieur de l'extérieur.

Le cercle comme frontière

L'ensemble des points (x, y) tels que $x^2 + y^2 = R^2$ est un **cercle** de centre O et de rayon R .

On pose $C(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$. Alors :

- $C(x, y) < 0$ si le point est à l'intérieur du cercle,
- $C(x, y) = 0$ si le point est sur le cercle,
- $C(x, y) > 0$ si le point est à l'extérieur du cercle.

Exercice 5: Le cercle | ★★

△ On considère le cercle \mathcal{C} d'équation $x^2 + y^2 = 25$.

1. Vérifier que le point $(3; 4)$ est sur le cercle \mathcal{C} .
2. Le point $(1; 1)$ est-il à l'intérieur ou à l'extérieur de \mathcal{C} ? Et le point $(4; 4)$? Justifier par le calcul.

▲ On pose $C(x, y) = x^2 + y^2 - 25$.

3. Calculer $C(1, 1)$ et $C(4, 4)$. Vérifier que le signe de C indique bien la position par rapport au cercle (négatif à l'intérieur, positif à l'extérieur).

La parabole comme frontière

La courbe d'équation $y = x^2 - 5$ s'appelle une **parabole**. C'est une courbe en forme de « U » dont le sommet est au point $(0; -5)$.

On pose $\Pi(x, y) = y - x^2 + 5$. Alors :

- $\Pi(x, y) > 0$ si le point est **au-dessus** de la parabole,
- $\Pi(x, y) = 0$ si le point est **sur** la parabole,
- $\Pi(x, y) < 0$ si le point est **en-dessous** de la parabole.

Vous étudierez les paraboles en détail en première. Pour l'instant, admettez sa forme et le fait qu'elle sépare le plan en deux régions.

Exercice 6: L'inéquation hybride | ★★★★★

On s'attaque au « Monstre » :

$$\frac{x^2 + y^2 - 25}{y - x^2 + 5} \geq 0$$

▲ Les frontières

1. Identifier les deux courbes frontières :

— La frontière du numérateur : quelle courbe a pour équation $x^2 + y^2 - 25 = 0$?

— La frontière du dénominateur : quelle courbe a pour équation $y - x^2 + 5 = 0$?

2. Tracer le cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 25$ et la parabole $\mathcal{P} : y = x^2 - 5$ dans un même repère. On pourra utiliser un tableau de valeurs pour la parabole : $x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

3. Trouver les points d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{P} en résolvant le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x^2 - 5 \end{cases}$$

Indication : remplacer x^2 par $y + 5$ dans la première équation, puis résoudre l'équation en y obtenue.

◆ La cartographie

4. Les deux courbes découpent le plan en **4 régions**. Placer un éclaireur dans chaque région.

Suggestions : $(0; 6)$ pour l'extérieur du cercle au-dessus de la parabole, $(0; -6)$ pour l'extérieur en-dessous, $(0; 3)$ pour l'intérieur au-dessus, $(2; -3)$ pour l'intérieur en-dessous.

5. Construire le « tableau de signes graphique » : pour chaque région, déterminer le signe du numérateur, le signe du dénominateur, puis le signe du quotient.

Région	Éclaireur	Num.	Dén.	Quotient
Ext. cercle, dessus parabole	$(0; 6)$			
Ext. cercle, dessous parabole	$(0; -6)$			
Int. cercle, dessus parabole	$(0; 3)$			
Int. cercle, dessous parabole	$(2; -3)$			

6. Colorier la solution de l'inéquation. Décrire en mots la forme obtenue.

7. La frontière « cercle » fait-elle partie de la solution ? Et la frontière « parabole » ? Justifier cette différence. (Pensez à la distinction entre numérateur et dénominateur.)

4. Partie IV – Le Défi de l'Architecte

Jusqu'ici, on vous a donné des inéquations et vous avez dessiné des territoires. Maintenant, on inverse : on vous donne le territoire, à vous de trouver l'inéquation. C'est un peu comme être architecte : on vous montre le bâtiment, à vous de retrouver le plan.

Exercice 7: Reconnaître | ★★

△ On donne trois figures et trois inéquations. Associer chaque figure à son inéquation.

Inéquations :

(I) : $x^2 + y^2 < 9$ (II) : $y > 2x - 1$ (III) : $x^2 + y^2 > 4$

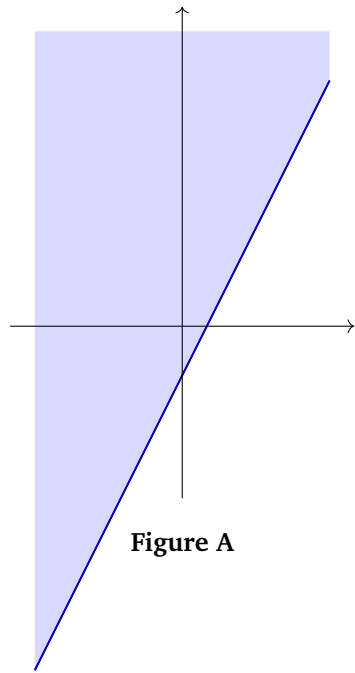


Figure A

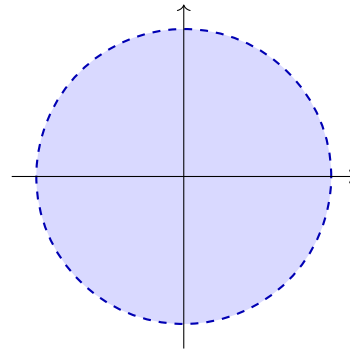


Figure B

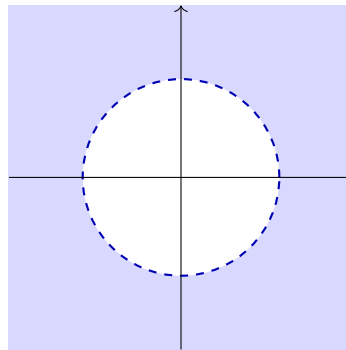
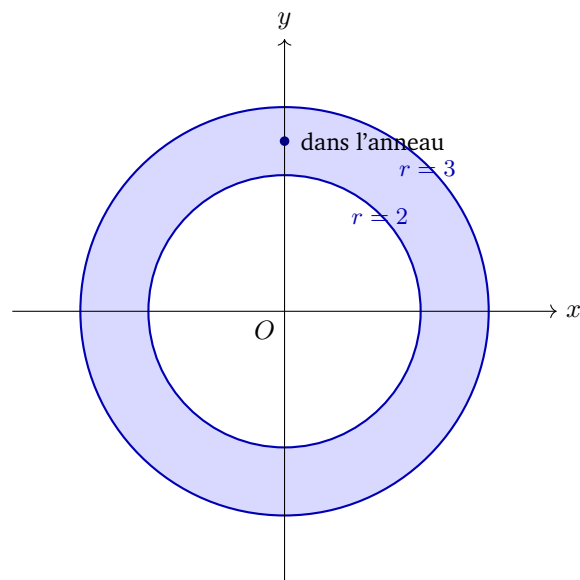


Figure C

Exercice 8: La Couronne — le Blason | ★★★

▲ On considère la figure suivante : une **couronne circulaire** (ou anneau), c'est-à-dire la zone comprise entre un cercle de rayon 2 et un cercle de rayon 3, tous deux centrés en O .



1. Trouver une inéquation de la forme $A(x, y) \times B(x, y) < 0$ qui dessine exactement cette couronne.
Indication : utiliser deux expressions du type $x^2 + y^2 - R^2$.
2. Vérifier votre réponse en testant trois éclaircisseurs :
 - $(0; 0)$: intérieur du petit cercle,
 - $(0; 2,5)$: dans l'anneau,
 - $(0; 4)$: extérieur du grand cercle.
3. Que se passe-t-il si on remplace $<$ par \leq ? Qu'ajoute-t-on au dessin?

Exercice 9: Le Cœur de Descartes | ★★★★★

◆ Création libre

« Inventez votre propre territoire. »

1. Choisissez 2 ou 3 courbes frontières parmi : droites, cercles (de centres et rayons au choix), paraboles.
2. Écrivez une inéquation produit ou quotient faisant intervenir ces courbes.
3. Tracez la solution et donnez-lui un nom.

*Il n'y a pas de réponse unique attendue. On valorise la **créativité** et la **rigueur** de la vérification (éclaircisseurs, justification des signes).*

Pour aller plus loin

Exercice 10: Vocabulaire topologique | ★★★★★

◆ Questions de réflexion

1. Parmi les solutions trouvées dans ce DM, lesquelles sont « d'un seul tenant » (c'est-à-dire qu'on peut relier deux points quelconques de la zone par un chemin qui reste dans la zone)? Lesquelles sont en *plusieurs morceaux*?

En mathématiques, on dit qu'un ensemble d'un seul tenant est **connexe**.

2. Quelle différence visuelle y a-t-il entre la solution d'une inéquation *stricte* ($<$) et *large* (\leq)? En termes de frontière, qu'est-ce qui change?

En mathématiques, un ensemble qui contient toutes ses frontières est dit **fermé**. Un ensemble qui n'en contient aucune est dit **ouvert**.

Exercice 11: La troisième dimension | ★★★★★

◆ Si $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ définit l'intérieur d'une sphère dans l'espace à trois dimensions, que dessinerait l'inéquation suivante?

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 4)(x^2 + y^2 + z^2 - 9) < 0$$

Décrire en mots la forme obtenue. (On pourra s'inspirer de la couronne de l'exercice précédent.)

Annexe A – Rappels

Identités remarquables

— $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

— $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

— $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Équation de droite

Une droite dans le plan peut s'écrire :

— Sous forme réduite : $y = ax + b$ (pente a , ordonnée à l'origine b).

— Sous forme générale : $ax + by + c = 0$.

Distance entre deux points

Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points du plan :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Équation de cercle

— Cercle de centre $O(0 ; 0)$ et de rayon R : $x^2 + y^2 = R^2$.

— Cercle de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

— Un point $M(x ; y)$ est à l'intérieur si $x^2 + y^2 < R^2$.

Tableau de signes

Pour étudier le signe d'un produit ou d'un quotient :

1. Trouver les **zéros** de chaque facteur (numérateur et dénominateur).
2. Trouver les **valeurs interdites** (dénominateur nul).
3. Dresser un tableau avec une ligne par facteur et une ligne pour le signe global.
4. Appliquer la **règle des signes** : le signe d'un produit/quotient est + si les facteurs sont de même signe, - s'ils sont de signes contraires.

Annexe B – Code Python : le Générateur d’Univers

Ce programme permet de visualiser la solution de n’importe quelle inéquation à deux variables. Modifiez la ligne marquée d’un commentaire pour explorer vos propres inéquations !

Listing 1 – Visualiser les territoires d’une inéquation

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Créer une grille de points dans le plan
5 x = np.linspace(-6, 6, 500)
6 y = np.linspace(-6, 6, 500)
7 X, Y = np.meshgrid(x, y)
8
9 # --- MODIFIEZ CETTE LIGNE pour explorer ! ---
10 Z = (Y - X) * (Y + X - 4)
11
12 # Colorier : bleu si positif, rouge si négatif
13 plt.figure(figsize=(6, 6))
14 plt.contourf(X, Y, np.sign(Z),
15             levels=[-1.5, -0.5, 0.5, 1.5],
16             colors=['#d32f2f', 'white', '#1976d2'])
17 # Tracer les frontières en noir
18 plt.contour(X, Y, Z, levels=[0], colors='black',
19            linewidths=1.5)
20
21 plt.axhline(y=0, color='gray', linewidth=0.5)
22 plt.axvline(x=0, color='gray', linewidth=0.5)
23 plt.axis('equal')
24 plt.grid(True, alpha=0.3)
25 plt.title("Territoires de l'inéquation")
26 plt.xlabel("x")
27 plt.ylabel("y")
28 plt.show()
```

Pour aller plus loin : essayez de remplacer la ligne `Z = ...` par :

- $Z = X^{**2} + Y^{**2} - 25$ (un cercle)
- $Z = (X^{**2} + Y^{**2} - 4) * (X^{**2} + Y^{**2} - 9)$ (la couronne !)
- $Z = (X^{**2} + Y^{**2} - 25) / (Y - X^{**2} + 5)$ (le « Monstre »)

Fin du devoir

«La géométrie est l’art de raisonner juste sur des figures fausses.»

— attribué à René Descartes