Lycée Notre Dame de Boulogne
Durée : 120 minutes

Orthogonalité dans l'espace

Chapitre G1 – Évaluation

Classe de Terminale
Spécialité mathématiques

La rigueur et la clarté de vos raisonnements ainsi que le soin apporté à votre copie seront pris en compte dans la notation.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Bon courage !

Exercice 1: Questions à choix multiples – 4 points

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Réponses à compléter :

Question	**1**	**2**	**3**	**4**
Réponse				

N°	**Question**	**A**	**B**	**C**	**D**
1	Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ sont :	orthogonaux	colinéaires	ni l'un ni l'autre	opposés
2	Le plan $\mathcal{P} : 3x-y+2z-5=0$ a pour vecteur normal :	$\begin{pmatrix}3\\-1\\-5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$
3	La distance du point $M(1\,;0\,;2)$ au plan $\mathcal{P} : x+2y-2z+1=0$ est :	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{5}{3}$
4	Les plans $\mathcal{P}_1 : x+2y-z+3=0$ et $\mathcal{P}_2 : -2x-4y+2z+1=0$ sont :	perpendiculaires	sécants non $\perp$	parallèles	confondus

Exercice 2: Produit scalaire et équations de plans – 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k})$.

1. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\1\\m\end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$. *(1 pt)*
   Déterminer la valeur de m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

2. On donne les points $A(2\,;-1\,;3)$, $B(4\,;0\,;1)$ et $C(1\,;2\,;2)$. *(2 pt)*
   (a) Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (ABC).
   (c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soit le plan $\mathcal{P} : 3x + 2y - z + 4 = 0$. *(2 pt)*
   (a) Déterminer l'équation du plan $\mathcal{Q}$ parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par $D(1\,;-1\,;0)$.
   (b) La droite Δ passe par D et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$. Montrer que Δ est orthogonale à $\mathcal{P}$.
   (c) Déterminer les coordonnées du point K, intersection de Δ et $\mathcal{P}$.

Exercice 3: Le cube et l'orthogonalité – 5 points

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points B, D, E et G. *(0,5 pt)*

2. (a) Calculer $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$. *(1 pt)*
   (b) En déduire que (AG) et (BD) sont orthogonales.

3. (a) Montrer que (AG) est également orthogonale à (BE). *(1 pt)*
   (b) En déduire que la grande diagonale (AG) est orthogonale au plan (BDE). Justifier.

4. Déterminer une équation cartésienne du plan (BDE). *(1 pt)*

5. Calculer la distance du point A au plan (BDE). *(1 pt)*

6. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal P de A sur le plan (BDE). *(0,5 pt)*

Exercice 4: Étude complète dans l'espace – 6 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne les points $A(1\,;2\,;0)$, $B(3\,;1\,;0)$, $C(-1\,;0\,;3)$ et $S(2\,;4\,;5)$.

Partie A – Le plan (ABC)

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. *(0,5 pt)*

2. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (ABC). *(1 pt)*

3. En déduire que le plan (ABC) a pour équation : $x + 2y + 2z - 5 = 0$. *(0,5 pt)*

Partie B – Distance et projeté

4. Calculer la distance $d(S\,,\,(ABC))$ du point S au plan (ABC). *(1 pt)*

5. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de S sur le plan (ABC). *(1,5 pt)*
   On écrira la représentation paramétrique de la droite passant par S et de vecteur directeur $\vec{n}$, puis on déterminera son intersection avec le plan.

6. Vérifier que H appartient bien au plan (ABC). *(0,5 pt)*

Partie C – Volume

7. Calculer l'aire du triangle ABC. *(0,5 pt)*
   On rappelle que l'aire d'un triangle ABC vaut $\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \sin(\widehat{BAC})$.

8. En déduire le volume du tétraèdre $SABC$. *(0,5 pt)*
   On rappelle que $V = \dfrac{1}{3} \times$ aire de la base $\times$ hauteur.